

6. Užití aritmetické a geometrické posloupnosti

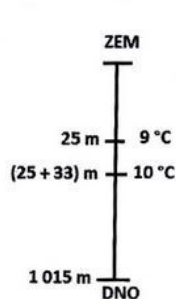
Příklady

- ① Rychlost šíření zvuku ve vzduchu je při 0 °C asi 331 m·s⁻¹, při vzrůstu teploty o 1 °C se zvyšuje o 0,6 m·s⁻¹. Jaká je rychlost zvuku při 10 °C, při 25 °C?

při 0 °C $v_1 = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ } AP: $d = 0,6$
 1 °C $v_2 = v_1 + 0,6$ } $v_1 = 331$
 2 °C $v_3 = v_2 + 0,6 = v_1 + 2 \cdot 0,6$ } $v_n = v_1 + (n-1)d$
 3 °C $v_4 = v_1 + 3 \cdot 0,6$
 4 °C $v_5 = v_1 + 4 \cdot 0,6$ **POZOR MŮŽE BYT TAKÉ**
 ...
 10 °C $v_{11} = v_1 + 10 \cdot 0,6 = 331 + 6 = 337 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 ...
 25 °C $v_{26} = v_1 + 25 \cdot 0,6 = 331 + 15 = 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

NĚKDY VHDNE OKTAV.
 POČAT. HODNOTU v_0
 $\Rightarrow 0^\circ\text{C} \dots v_0$
 1 °C $\dots v_1 = v_0 + 0,6$
 ...
 10 °C $v_{10} = v_0 + 10 \cdot 0,6$
 ...
 25 °C $v_{25} = v_0 + 25 \cdot 0,6$
 - NEVHODNĚ PRO SOUČTY!

- ② Teploty Země přibývá do hloubky přibližně o 1 °C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu hlubokého 1 015 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9 °C?

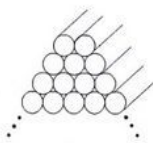


1. MŮŽE ÚSUDKEM
 $n = \frac{1015 - 25}{33} = 30$
 $t = 9 + 30 \cdot 1 = 39^\circ\text{C}$
 [KONTROLA:
 $25 + 30 \cdot 33 = 25 + 990 = 1015 \text{ m}$]

2. MŮŽE AP
 $a_1 = 9$
 $d = 1$
 $a_n = ?$
 $a_{31} = a_1 + 30d$
 $a_{31} = 9 + 30 \cdot 1$
 $a_{31} = 39^\circ\text{C}$

AP₂
 $a_1 = 25$
 $d = 33$
 $a_n = ?$
 $a_n = 25 + (n-1) \cdot 33$
 $1015 = 25 + 33n - 33$
 $1023 = 33n$
 $n = 31$

- ③ Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 90 rour, jsou-li v nejvyšší vrstvě 2 roury? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?



AP: $a_1 = 2$ } $d = 1$
 $a_2 = 3$
 ...
 $a_n = ?$

$p_n = 90$
 $\frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 90$
 $n(2 + n + 1) = 180$
 $3n + n^2 = 180$
 $n^2 + 3n - 180 = 0$

$a_{12} = a_1 + 11d$
 $a_{12} = 2 + 11 \cdot 1$
 $a_{12} = 13 \text{ ROUR}$

$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 180}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$
 $n_1 = \frac{-3 + 27}{2} = 12$ **VRSTEV**
 $n_2 = \frac{-3 - 27}{2} = -15 \notin \mathbb{N}$

- ④ Část střechy má tvar lichoběžníku. Kolik tašek je třeba na pokrytí této části střechy, má-li být u hřebene 85 tašek, v každé další řadě o 1 více než v předchozí a ve spodní řadě při okapu 102 tašek?



$a_1 = 85 \text{ tašek}$ } AP
 $a_2 = 86$ } $d = 1$
 ...
 $a_n = 102 \text{ tašek}$

$p_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $\rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$
 $p_{18} = \frac{18}{2}(85 + 102)$ $102 = 85 + (n-1) \cdot 1$
 $p_{18} = 1683 \text{ tašek}$ $102 = 85 + n - 1$
 $n = 18$

- ⑤ Pětistupňový kotouč pro převody rychlostí má mít krajní poloměry 100 mm a 340 mm. Vypočítejte poloměry zbývajících stupňů (tloušťky všech stupňů se sobě rovnají).



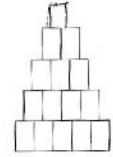
$$r_1 = 100 \text{ mm} \quad AP: \quad r_5 = r_1 + 4d \quad r_5 = 340 \text{ mm}$$

$$340 = 100 + 4d \quad r_2 = r_1 + d = 160 \text{ mm}$$

$$240 = 4d \quad r_3 = 220 \text{ mm}$$

$$d = 60 \text{ mm} \quad r_4 = 280 \text{ mm}$$

- ⑥ Kolik plechovek nápoje je třeba k sestavení „rovnoramenného trojúhelníku“ tak, že v nejvyšší vrstvě je 25 plechovek, v nejvyšší 1, v každé následující nižší o 1 plechovku méně.



$$a_1 = 1 \quad d = 1 \quad AP \quad b_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = 2 \quad b_{25} = \frac{25}{2}(1 + 25) \quad 25 = 1 + (n-1) \cdot 1$$

$$a_n = 25 \quad b_{25} = \frac{25 \cdot 26}{2} = 25 \cdot 13 \quad 25 = n$$

$$b_{25} = 325 \text{ plechovek}$$

LZE I OBRÁCENÉ

$$a_1 = 25 \quad d = -1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = 24 \quad 1 = 25 + (n-1)(-1)$$

$$a_n = 1 \quad 1 = 25 - n + 1 \Rightarrow n = 25$$

$$b_{25} = \frac{25}{2}(25 + 1) = 325 \text{ plechovek}$$

- ⑦ Buduje se hlediště pro 1 200 diváků (letního kina). V 1. řadě má být 40 sedadel, v každé následující postupně o 4 sedadla více. Kolik sedadel bude mít hlediště?

přibližně 1200 sedadel

1. řada $a_1 = 40$ sedadel

další o 4 více $\Rightarrow AP: d = 4$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 40 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 36 + 4n$$

$$\frac{n}{2}(40 + 36 + 4n) > 1200$$

$$\frac{n}{2}(76 + 4n) > 1200$$

$$n(38 + 2n) > 1200 \quad | :2$$

$$19n + n^2 > 1200$$

$$n^2 + 19n - 1200 > 0 \quad \text{KV. JEDICE}$$

$$n_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 + 4 \cdot 600}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{2761}}{2} = \frac{-19 \pm 52,55}{2}$$

$$n_{1,2} = 16,275 \quad n_{1,2} = -37,275$$

$$n > 16,275 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 17$$

počet sedadel 17 řad

$$b = \frac{17}{2}(40 + 104) = 1224 \text{ sedadel}$$

$$a_{17} = a_1 + 16d$$

$$a_{17} = 40 + 16 \cdot 4 = 104 \text{ sedadel}$$

v poslední řadě

- ⑧ Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stavu je 2 metrů látky za 1 hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další vždy po 2 minutách. Kolik metrů látky se vyrobí za první hodinu celkem na všech tkalcovských stavech?

na 1 hod

$$t_1 = 0 \text{ min} \quad l_1 = 2$$

$$t_2 = 2 \text{ min} \quad l_2 = 2 - \frac{2}{60} \cdot 2 = \frac{29}{30}$$

$$t_3 = 4 \text{ min} \quad l_3 = 2 - \frac{4}{60} \cdot 2 = \frac{28}{30}$$

$$\vdots$$

$$t_{16} = t_1 + 15 \cdot 2 \quad l_{16} = 2 - \frac{30}{60} \cdot 2 = \frac{2}{30}$$

$$t_{16} = 30 \text{ min}$$

$$l = \frac{n}{2}(l_1 + l_n)$$

$$l = \frac{16}{2} \left(2 + \frac{2}{30} \right) = \frac{16}{2} \cdot \frac{62}{30}$$

$$l = 12,8 \text{ (metrů)}$$

[na 30 min budou všechny stavy puštěny]

U pr. 9-10 vhodné volit poslední člen na numeru

- 9) Určete velikost x ostrého úhlu a kvocient, znáte-li první 3 členy geometrické posloupnosti.

a) $\sin x, \operatorname{tg} x, \frac{1}{\cos x}$

GP $\Rightarrow q = q_1 = q_2$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$q_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

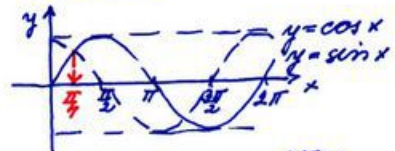
$$q = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

NEBO

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \\ \operatorname{tg} x = 1 \\ x = 45^\circ \end{array} \right]$$

OSTRÝ ÚHEL $\Rightarrow$ 1. br.

$x = 45^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right)$



b) $\sin x, \operatorname{tg} x, \frac{1}{\sin x}$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$q_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$q = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

NEBO

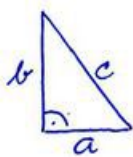
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \\ 1 - \cos^2 x = 2 \cos^2 x \\ 2 \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \\ |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{1. br. ostrý} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 45^\circ \end{array} \right]$$

$|\sin x| = |\cos x|$
 x ostrý $\Rightarrow$ 1. br. ①
 $\sin x = \cos x$
 $x = 45^\circ$

- 10) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří 3 za sebou jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Vypočítejte tyto délky, je-li

a) obsah trojúhelníku 6 m^2 .



$$a = x - d$$

$$b = x$$

$$c = x + d$$

$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$6 = \frac{1}{2} (x - d) \cdot x$$

$$12 = x^2 - dx \quad \textcircled{1}$$

2. rov. 2. rovnice

Pyth. v. $c^2 = a^2 + b^2$

$$(x + d)^2 = (x - d)^2 + x^2$$

$$x^2 + 2dx + d^2 = x^2 - 2dx + d^2 + x^2$$

$$4dx = x^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad 12 = x^2 - dx$$

$$\textcircled{2} \quad 4dx = x^2 \Rightarrow d = \frac{x^2}{4x} = \frac{x}{4}$$

$$12 = x^2 - \frac{x}{4} \cdot x \quad \left[\begin{array}{l} \text{ne, } x \neq 0 \\ \text{délka strany} \end{array} \right]$$

$$12 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$12 = \frac{3x^2}{4}$$

$$48 = 3x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$|x| = 4$$

$$x = \pm 4$$

$$x = 4 \quad (-4 \text{ nepřijm. } x > 0 \text{ délka})$$

$$d = \frac{x}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

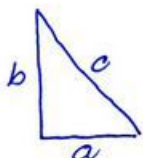
Návěť:

$$a = x - d = 4 - 1 = 3 \text{ cm}$$

$$b = x = 4 \text{ cm}$$

$$c = x + d = 4 + 1 = 5 \text{ cm}$$

b) obvod trojúhelníku 96 cm .



$$a = x - d$$

$$b = x$$

$$c = x + d$$

$$\sigma = a + b + c$$

$$96 = x - d + x + x + d$$

$$96 = 3x$$

$$x = 32$$

Návěť: $a = x - d = 32 - 8 = 24 \text{ cm}$

$$b = x = 32 \text{ cm}$$

$$c = x + d = 32 + 8 = 40 \text{ cm}$$

P.N. $c^2 = a^2 + b^2$

$$(x + d)^2 = (x - d)^2 + x^2$$

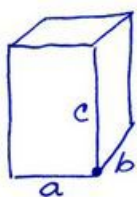
$$x^2 + 2dx + d^2 = x^2 - 2dx + d^2 + x^2$$

$$4dx = x^2$$

$$d = \frac{x^2}{4x} = \frac{x}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

[$x \neq 0$ délka, ne]

- ⑪ Povrch kvádru je 78 cm^2 , součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu je 13 cm . Vypočítejte objem kvádru, tvoří-li délky hran 3 po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.



$$\text{GP: } a = \frac{x}{q} \\ b = x \\ c = xq$$

$$S = 2(ab + ac + bc) \quad a + b + c = 13 \\ 78 = 2\left(\frac{x}{q} \cdot x + \frac{x}{q} \cdot xq + x \cdot xq\right) \quad \frac{x}{q} + x + xq = 13 \quad (3) \\ 39 = \frac{x^2}{q} + x^2 + x^2q \quad (1) \quad \text{2 krát 2 množí.}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad 39 &= \frac{x^2}{q} + x^2 + x^2q \quad | \cdot q \\ 13 &= \frac{x}{q} + x + xq \quad | \cdot q \\ 39q &= x^2(1 + q + q^2) \\ 13q &= x(1 + q + q^2) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\underline{3 = x}$$

dos. q

$$\begin{aligned} 13q &= 3(1 + q + q^2) \\ 13q &= 3 + 3q + 3q^2 \\ 3q^2 - 10q + 3 &= 0 \\ q_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} \\ q_{1,2} &= \frac{10 \pm 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ &\quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

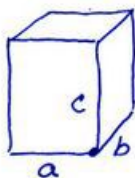
- pro $q_1 = 3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{3} = 1 & V_1 &= abc \\ b_1 &= x = 3 & V_1 &= 1 \cdot 3 \cdot 9 \\ c_1 &= xq = 3 \cdot 3 = 9 & V_1 &= 27 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- pro $q_2 = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{x}{q} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9 & V_2 &= abc \\ b_2 &= x = 3 & V_2 &= 9 \cdot 3 \cdot 1 \\ c_2 &= xq = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 & V_2 &= 27 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- ⑫ Délky stran kvádru tvoří geometrickou posloupnost, objem je 216 cm^3 . Součet délek hran z jednoho vrcholu je 21 cm . Určete délky hran.



$$\text{GP} \\ a = \frac{x}{q} \\ b = x \\ c = xq$$

$$\begin{aligned} V &= abc \\ 216 &= \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq \\ 216 &= x^3 \\ \underline{x &= 6} \end{aligned}$$

$$a + b + c = 21$$

$$\frac{x}{q} + x + xq = 21$$

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 21 \quad | \cdot q$$

$$6 + 6q + 6q^2 = 21q$$

$$6q^2 - 15q + 6 = 0 \quad | :3$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4}$$

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- pro $q_1 = 2$:

$$a_1 = \frac{x}{q} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$b_1 = x = 6 \text{ cm}$$

$$c_1 = xq = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$$

- pro $q_2 = \frac{1}{2}$:

$$a_2 = \frac{x}{q} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ cm}$$

$$b_2 = 6 \text{ cm}$$

$$c_2 = xq = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

! u pr. ⑨ - ⑫ lze volit i $a = a, b = aq, c = aq^2$ dívá však zvlášť. $\Rightarrow$ nepoužijte-li vst. p. v.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= a \cdot aq \cdot aq^2 \\ 216 &= a^3 q^3 \\ aq &= 6 \\ a &= \frac{6}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 21 \\ a + aq + aq^2 &= 21 \\ a(1 + q + q^2) &= 21 \\ \frac{6}{q}(1 + q + q^2) &= 21 \quad | \cdot q \\ 6q^2 + 6q + 6 &= 21q \\ &\text{dálku m. 1. m.} \end{aligned}$$

- 13) Poločas přeměny radia C (RaC) je asi 20 minut. Určete jeho hmotnost za 2 hodiny, je-li počáteční hmotnost 3 mg (poločas přeměny – doba, za kterou se přemění polovina počáteční hmotnosti radioaktivní látky)

poč. stav $m_0 = 3 \text{ mg}$
 20 min $m_1 = m_0 \cdot \frac{1}{2}$
 40 min $m_2 = m_1 \cdot \frac{1}{2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 60 min $m_3 = m_2 \cdot \frac{1}{2} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $\vdots$
 $a_n = a_0 q^n$
 120 min $m_6 = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{64} \text{ mg}$

NEBO GP: $m_1 = a_1 q = 3 \text{ mg}, q = \frac{1}{2}$
 0 min $m_1 = 3 \text{ mg}$
 20 min $m_2 = m_1 q = 3 \cdot \frac{1}{2}$
 40 min $m_3 = m_2 q = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $\vdots$
 $a_n = a_1 q^{n-1}$
 120 min $m_7 = m_1 q^6 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{64} \text{ mg}$

- 14) Světelný paprsek ztrácí při průchodu skleněnou deskou $\frac{1}{12}$ své intenzity. Jaká je intenzita po průchodu čtyřmi stejnými deskami?

poč. stav I_0
 po průchodu 1. deskou $I_1 = I_0 - \frac{1}{12} I_0 = \frac{11}{12} I_0$
 2. deskou $I_2 = \frac{11}{12} I_1 = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^2$
 3. deskou $I_3 = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^3$
 4. deskou $I_4 = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^4 = 0,706 I_0$

NEBO GP: $a_1 = I_0, q = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$
 $a_1 = I_0$
 1. $a_2 = \frac{11}{12} I_0$
 2. $a_3 = a_2 q = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^2$
 3. $a_4 = a_3 q = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^3$
 4. $a_5 = a_4 q = I_0 \left(\frac{11}{12}\right)^4$

- 15) Tlak recipientu vývěvy klesne po 1 tahu pístu o 4 %. Kolik tahů pístu je potřeba, aby tlak klesl na 10 % původního tlaku?

poč. hodnota p_0
 1. tah $p_1 = p_0 - \frac{4}{100} p_0 = p_0 \cdot \frac{96}{100}$
 2. tah $p_2 = p_1 \cdot \frac{96}{100} = p_0 (0,96)^2$
 $\vdots$
 n. tah $p_n = p_0 (0,96)^n = \frac{10}{100} p_0$

tlak $0,96^n p_0 = 0,1 p_0$
 $0,96^n = 0,1$ | $\log$
 $\log 0,96^n = \log 0,1$
 $n \log 0,96 = \log 0,1$ $\log a^n = n \log a$
 $n = \frac{\log 0,1}{\log 0,96} = 56,4 \approx 57 \text{ tahů}$ [naok. makro]

- 16) Jedním tažením drátu se zmenší jeho průměr o 10 %. Jaký průměr bude mít drát s původním průměrem 8 mm po pěti taženích?

poč. hodnota $d_0 = 8 \text{ mm}$
 1. tah $d_1 = d_0 - \frac{10}{100} d_0 = 0,9 d_0$
 2. tah $d_2 = d_1 \cdot 0,9 = d_0 (0,9)^2$
 $\vdots$
 5. tah $d_5 = (0,9)^5 d_0 = 0,9^5 \cdot 8 = 4,72 \text{ mm}$

POULES VELICINY $a_n = a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

- 17) Jistý druh bakterií se rozmnožuje v příznivých podmínkách tak, že každá bakterie se za půl hodiny rozdělí na dvě. Kolik bakterií vznikne za 24 hodin z jedné bakterie?

0 h ... $a_1 = 1$ GP: $q = 2$
 0,5 h $a_2 = 2$
 1 h $a_3 = 4 = 2^2$
 1,5 h $a_4 = 8 = 2^3$
 $\vdots$
 24 h $a_{49} = 2^{49}$ [2 · 24 + 1]
 $b_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
 $a_{49} = 1 \cdot \frac{2^{49} - 1}{2 - 1} = 5,6 \cdot 10^{14} \text{ bakterií}$
 $= 560 \cdot 10^{12} = 560 \text{ bilionů bact.}$

- 18) Ve městě žilo na počátku roku 2000 23 600 obyvatel. Kolik obyvatel lze očekávat na počátku roku 2005, jestliže se roční přírůstek odhaduje na 1,8 %?

rok 2000 $a_0 = 23\,600$
 2001 $a_1 = 23\,600 + \frac{1,8}{100} \cdot 23\,600 = 23\,600 (1 + 0,018) = 23\,600 \cdot 1,018$
 $\vdots$
 2005 $a_5 = 23\,600 (1,018)^5 = 25\,802 \text{ obyv.}$
 VZRŮST VELICINY
 $a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

- 19) Množství dřeva v jedné lesní oblasti je odhadnuto na $5,5 \cdot 10^5 \text{ m}^3$, roční přírůstek na 2,3 %. Kolik krychlových metrů bude v této oblasti za 3 roky? S těžbou se nepočítá.

$$a_0 = 5,5 \cdot 10^5$$

$$1. \text{ rok } a_1 = 5,5 \cdot 10^5 + 5,5 \cdot 10^5 \cdot \frac{2,3}{100} = 5,5 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{2,3}{100}\right) = 5,5 \cdot 10^5 \cdot 1,023$$

$$2. \text{ rok } a_2 = a_1 \cdot 1,023 = 5,5 \cdot 10^5 \cdot 1,023 \cdot 1,023 = 5,5 \cdot 10^5 \cdot 1,023^2$$

$$3. \text{ rok } a_3 = 5,5 \cdot 10^5 \cdot 1,023^3 = \underline{5,9 \cdot 10^5 \text{ m}^3} \quad a_n = a_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

20) HISTORICKÉ ÚLOHY

- a) Kupec chtěl koupit koně. Prodávající mu nabídl, že koně dostane zadarmo, zaplatí pouze hřebíky v jeho podkovách (každá přibita 6 hřebíky, tj. celkem 24 hřebíků) a sice za první hřebík 1 groš, za druhý hřebík 2 groše, za každý další 2krát tolik než za předchozí. Kupec nadšeně souhlasil. Kolik grošů by měl za koně zaplatit?

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 4 = 2^2$$

$$\vdots$$

$$a_{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 = 2^2 \\ \vdots \\ a_{24} \end{array} \right\} \text{GP } q = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{SOUČET } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + a_{24}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{24} = 1 \cdot \frac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 2^{24} - 1 = 2^{24} \text{ grošů}$$

$$= 16\,777\,215 \text{ grošů (! keš!)} \quad \text{tedy}$$

- b) AHMESŮV PAPARUS 2 000 př. n. l.

Každý ze 7 lidí má 7 koček, každá kočka chytí 7 myší, každá myš sežere 7 klasů ječmene, z každého klasu může vyrůst 7 věder zrna. Kolik věder zrna se uchrání zásluhou koček?

$$\begin{array}{ll} \text{lidé} & a_1 = 7 \\ \text{kočky} & a_2 = 7 \cdot 7 = 7^2 \\ \text{myši} & a_3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 \\ \text{klasy} & a_4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 \\ \text{vědra} & a_5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 \end{array} \quad \text{GP: } q = 7, q = 7$$

$$a_5 = a_1 q^{5-1} = a_1 q^4 = 7 \cdot 7^4 = 7^5$$

$$= \underline{16\,807 \text{ věder zrna}}$$

[! NE SOUČET, ALE KOLIK VĚDER ZRNA]

- c) Vynálezce šachu, matematika Sessa Ebu Daheru, vyzval indický vládce Šehram (velmi si hru oblíbil), aby si za svůj objev vyžádal náležitou odměnu. Sessa žádal tolik pšeničných zrn, kolik by jich stačilo na pokrytí všech 64 polí šachovnice tak, aby na první pole přišlo jedno zrnko, na druhé 2, na třetí 4 a na každé další 2krát tolik jako na předešlé. Vládce považoval tento požadavek za příliš skromný. odhadněte, kolik vagonů (po 100 t) pšenice by byl Sessa dostal, připadá-li na 1 kg asi 20 000 zrn. Kolik vlaků o 10 vagónech by to bylo?

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 = 2^2 \\ a_4 = 8 = 2^3 \\ \vdots \\ a_{64} \end{array} \right\} \text{GP: } a_1 = 1, q = 2$$

$$\text{SOUČET } 1 + 2 + 4 + \dots + a_{64} = S_{64}$$

$$S_{64} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \text{ (zrn)}$$

$$= \underline{1,84 \cdot 10^{19} \text{ zrn}}$$

$$1 \text{ kg} \dots 20\,000 \text{ zrn}$$

$$x \text{ kg} \dots \frac{S_{64}}{20\,000} = \frac{1,84 \cdot 10^{19}}{20\,000} = 9,2 \cdot 10^{14} \text{ kg} = \underline{9,2 \cdot 10^4 \text{ t}}$$

$$\text{počet vagonů } n = \frac{x}{100} = \frac{9,2 \cdot 10^4}{100} = \underline{9,2 \cdot 10^2 \text{ vagonů}}$$

$$\text{počet vlaků } n = \frac{9,2 \cdot 10^2}{10} = \underline{9,2 \cdot 10^1 \text{ vlaků}} = \underline{92 \text{ vlaků}} = \underline{1 \text{ miliardou vlaků}}$$